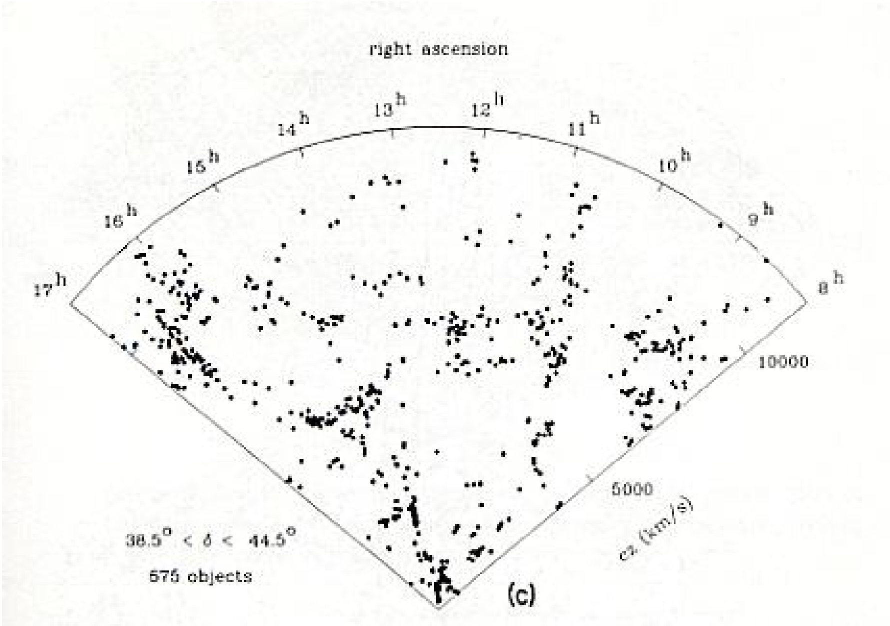
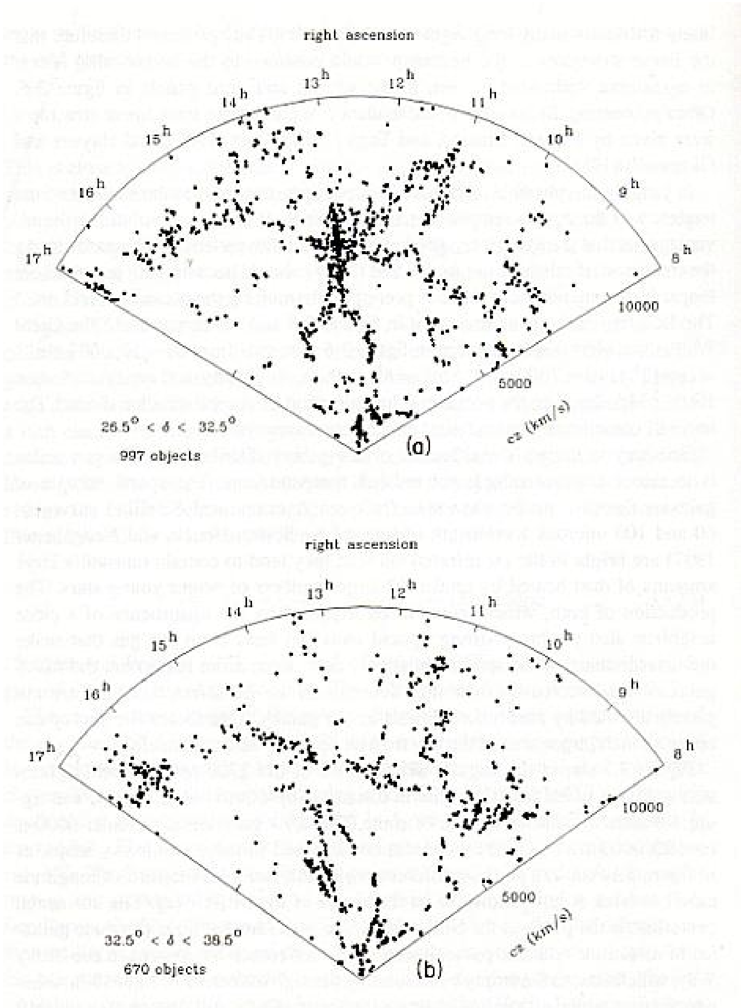
8. Introduzione alla Cosmologia.

La prima ipotesi su cui si basa la costruzione di modelli cosmologici adatti alla descrizione in grande del nostro universo è il **Principio Cosmologico,** che consiste nell'ipotesi che *l'universo sia spazialmente omogeneo ed isotropo*, come ora spiegheremo.
In effetti questa affermazione è esagerata per quanto riguarda l'universo intero: come vedremo, le osservazioni non ci possono fornire informazioni che sul solo universo visibile (questa affermazione sarà chiarita in seguito), dell'ordine di grandezza di 6000 Mpc (1 pc ≈ 3 anni-luce è la distanza da cui il raggio dell'orbita della Terra attorno al Sole è visto sotto un angolo di un secondo d'arco).
Si suppone allora che, in media, il numero di galassie per unità di volume sia sempre lo stesso, prendendo come diametro dell'unità di volume ≈ 300 Mpc: notiamo che la nostra galassia, la Via Lattea, ha un asse maggiore di ≈ 12 kpc, la distanza del Sole dal centro galattico è ≈ 8 kpc, la galassia Andromeda, M31, è a distanza di ≈ 770 kpc, il raggio dell'ammasso di galassie nella costellazione della Vergine è di ≈3 Mpc e la sua distanza da noi è ≈ 17 Mpc; quindi la nostra unità di volume è molto più grande del volume medio di una singola galassia ed anche di un ammasso di galassie (parleremo in seguito del problema della misura della distanza) e che inoltre la velocità di allontanamento delle galassie dalla nostra dipende solo dalla distanza e non dalla direzione in cui guardiamo.
Fra poco tradurremo queste affermazioni in termini matematici; per il momento cerchiamo di capirle meglio.

L'**omogeneità,** cioè l'**invarianza per traslazione,** è in qualche modo la cosa più complicata da verificare nelle lunghezze d'onda del visibile, come è evidente sia semplicemente guardando il cielo ad occhio nudo (ricordiamo però che allora stiamo osservando, in pratica, solo una parte di un braccio della nostra galassia), sia osservando le foto; ad esempio le prime tre ci mostrano la distribuzione delle galassie con magnitudine apparente fino a ≈ 15.5, in funzione della loro distanza in tre fasce di spessore di 6^o di declinazione in un angolo di ≈ 100^o lungo la direzione dell'ascensione retta.



In queste foto appare evidente che la distribuzione delle galassie nelle nostre vicinanze è tutt'altro che omogenea.



Se però guardiamo la struttura della distribuzione delle galassie in altre lunghezze d'onda, ci accorgiamo che la situazione comincia a cambiare; la figura successiva è un'immagine della distribuzione di sorgenti in infrarosso delle galassie più lontane da noi; ma anche nel visibile la situazione non è poi così drammatica se si aumenta il numero degli oggetti presi in considerazione:

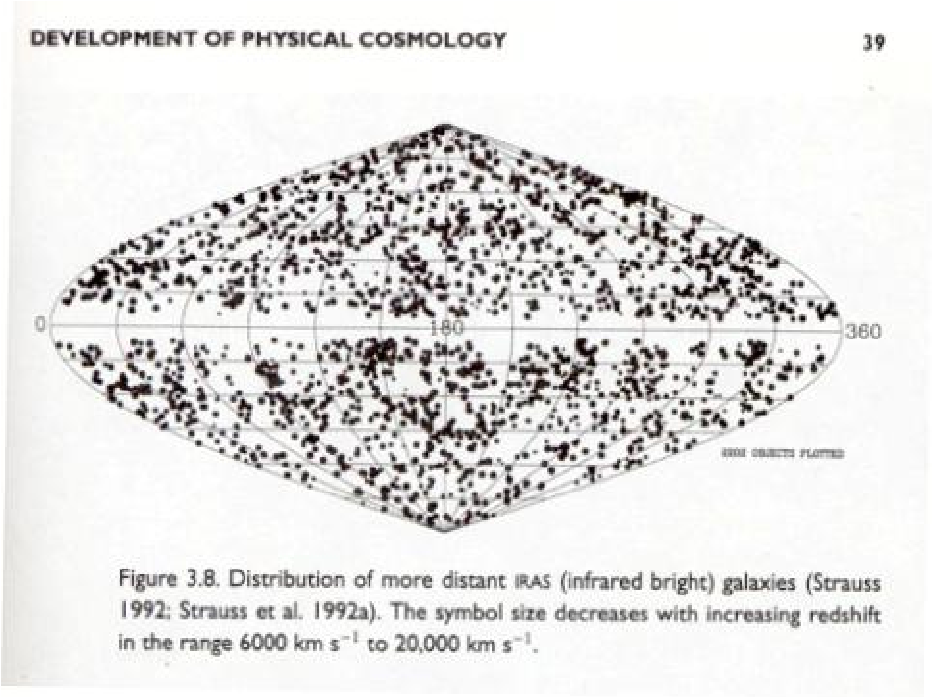
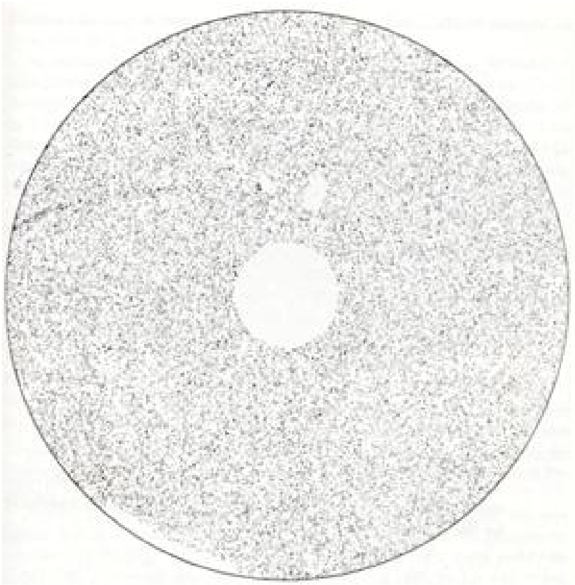


Figure 3.8. Distribution of more distant IRAS (infrared bright) galaxies (Strauss 1992; Strauss et al. 1992a). The symbol size decreases with increasing redshift in the range 6000 km s^{-1} to 20,000 km s^{-1}.

Questa foto è l'immagine della distribuzione di galassie data dall'osservatorio del Lick, in un angolo di 50^o attorno al Polo Nord Galattico.



Quest'ultima è invece una fotografia della distribuzione angolare delle circa 31000 radiosorgenti più brillanti a tutto il 1990.

Tutto ciò ci mostra che, man mano che allarghiamo la nostra indagine ad oggetti più lontani ed in lunghezze d'onda diverse, abbiamo immagini che si approssimano sempre più all'omogeneità spaziale.

C'è però anche un antico problema di principio, noto come **Paradosso di Olbers (1826),** ma precedentemente messo in risalto da W. Stukeley ed E. Halley alla fine 1600, e nel 1744 da de Cheseaux, che si può enunciare dicendo che *il cielo dovrebbe essere per lo meno tanto brillante di notte quanto di giorno.*
Sotto l'ipotesi che le stelle siano distribuite uniformemente in un universo statico ed infinito **da sempre** con luminosità costante L (quest'ultima ipotesi è in effetti irrilevante) si arriva ad un'immediata contraddizione. Infatti se ***n*** è il numero di stelle per unità di volume, il flusso che arriva a noi da una shell di spessore ***dr*** è

$$df = \frac{4pr^2 nL}{4pr^2} dr = nLdr\,;$$

ne segue che il flusso totale che ci arriva è

$$f = \lim_{\bar{r}\to\infty} \int_0^{\bar{r}} nLdr = \infty\,.$$

La soluzione che fornisce Olbers al paradosso, che ci sia abbastanza materiale opaco da oscurare la luce delle stelle lontane, non è ovviamente sufficiente, perché, se le stelle vivono da sempre, questo mezzo, assorbendo l'energia delle sorgenti lontane, si

riscalda ed ad un certo momento deve riemettere tanta energia quanta ne assorbe, se tutto deve, per ipotesi, restare stazionario.
Vedremo in seguito che solo la cosmologia relativistica ci permetterà di risolvere in pieno il problema che, anche se non si pone più a livello stellare grazie ai modelli moderni delle galassie, si pone di nuovo con i sistemi galattici a livello di tutto l'universo (in realtà è anche possibile risolverlo, nella sua forma originale, introducendo l'evoluzione stellare, ma ciò non è molto importante perché è difficile tradurlo in termini galattici).

L'altra ipotesi del principio cosmologico, **l'isotropia**, che è matematicamente rappresentabile come **l'invarianza per rotazione attorno all'osservatore**, è stata ipotizzata da Slipher nel 1919 e poi dimostrata da Hubble nel 1929 con la collaborazione di Humanson dopo la loro scoperta dell'allontanamento delle galassie lontane e della linearità di tale allontanamento in funzione della distanza.
La relazione risultante, nota oggi come **Legge di Hubble**, è

$$\vec{v}_r = H_0 \vec{d}$$

con v_r velocità radiale di recessione delle galassie lontane (non appartenenti cioè al Gruppo Locale, formato dalla nostra Via Lattea, dalla galassia di Andromeda e da un'altra ventina di galassie irregolari, tra cui sono più note le Nubi di Magellano), d distanza dalla nostra galassia ed H_0 costante, misurata in *km/sec/Mpc*.

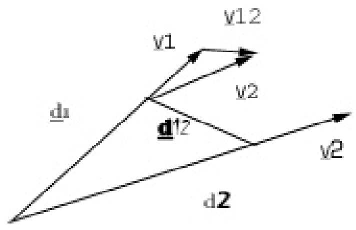
Si può vedere subito che tale legge è indipendente dalla posizione dell'osservatore. Infatti, se v_1 e v_2 sono le velocità di recessione di due galassie, rispettivamente a distanza d_1 e d_2 da noi, la velocità relativa dell'una rispetto all'altra sarà

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = H_0 \vec{d}_1 - H_0 \vec{d}_2 = H_0 \vec{d}_{12}$$

con

$$\vec{d}_{12} = \vec{d}_1 - \vec{d}_2$$

distanza relativa tra le due.



Quindi non esiste alcun punto privilegiato rispetto all'espansione dell'universo, cioè non esiste un centro.
Questo fatto sarà generalizzato in seguito per uno spazio non euclideo attraverso un teorema che dice che uno spazio omogeneo ed isotropo rispetto ad un punto (noi) è isotropo rispetto a tutti i punti.

La misura, a questo livello, della precisione dell'isotropia è legata all'errore sulla misura della costante di Hubble, che valeva, ai tempi di Hubble $H_0 = 500 \pm 50$ e vale oggi $H_0 = 65 \pm 6$: quando Hubble ha fatto la sua misura, erano sbagliate le calibrazioni del colore dell'ammasso delle Iadi, e, da quando è stato corretto, ha fornito i nuovi valori. In ogni caso notiamo che l'isotropia era ed è verificata al 10%.
Vedremo in seguito che le misure sull'omogeneità della temperatura della radiazione cosmica di microonde porteranno l'errore sull'omogeneità e sull'isotropia al valore di $5 \cdot 10^{-6}$, e questo sarà uno dei risultati più importanti e sconvolgenti della cosmologia moderna.

Una delle implicazioni del principio cosmologico è, come vedremo bene fra poco, la possibilità di definire un "tempo cosmico": se accettiamo l'idea di un'evoluzione temporale, dobbiamo avere la possibilità di misurare il tempo in un qualunque punto dell'universo in maniera omogenea. L'unico modo che abbiamo per definire questo tempo in modo fisico sarà quello di riferirci a qualche grandezza scalare che sia uguale dappertutto, come ad esempio la densità o la temperatura (che vedremo in seguito come saranno definite).
Per analizzare invece il modo matematico di definire il "tempo cosmico", conviene studiare le equazioni in un sistema di riferimento che utilizzeremo quasi sempre in cosmologia: il sistema delle *coordinate comoventi.*
Le richieste per la costruzione di queste coordinate sono che ogni punto del sottospazio spaziale dello spazio-tempo sia etichettato da tre coordinate che restino costanti durante l'evoluzione dinamica del sistema. Ogni punto porterà anche un orologio, e tutti gli orologi verranno opportunamente sincronizzati.

Per ottenere ciò cominciamo col notare che il legame tra tempo proprio s e tempo coordinato t è dato da

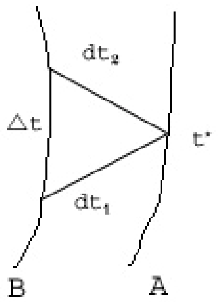
$$s = \int \sqrt{g_{00}}\, dt$$

come si ricava ovviamente dall'elemento di linea

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b$$

valutato in due istanti diversi nello stesso punto dello spazio.

Viceversa, l'elemento di distanza spaziale *dl* non può essere semplicemente definito ponendo $dt = 0$ perché il tempo proprio, in un campo gravitazionale, è legato alla coordinata "temporale" *t* dalla relazione precedente, che in genere dipende dal punto dello spazio perché $g_{00} = g_{00}(t,x^1,x^2,x^3)$.



Per determinare *dl* supponiamo che un segnale luminoso venga emesso da un punto *B* di coordinate spaziali $x^i + dx^i$ verso un punto *A* di coordinate x^i e riflesso lungo lo stesso cammino.
Il tempo impiegato dalla partenza al ritorno in *B* è ovviamente il doppio della distanza tra i due punti, diviso la velocità della luce *c*.

Scriviamo allora il ds^2 mettendo in evidenza le coordinate spaziali:

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = g_{ij}dx^i dx^j + 2g_{0i}dt dx^i + g_{00}dt^2$$

con

$$a,b = 0\ldots 3, \quad i,j = 1\ldots 3$$

e notiamo che l'intervallo tra la partenza e l'arrivo del segnale in *B* è di tipo luce e lo si ottiene ponendo $ds = 0$.
Risolvendola come equazione algebrica in *dt* se ne ricavano le due radici

$$dt_1 = \frac{1}{g_{00}}\left(-g_{0i}dx^i - \sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{ij}g_{00})dx^i dx^j}\right); \quad dt_2 = \frac{1}{g_{00}}\left(-g_{0i}dx^i + \sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{ij}g_{00})dx^i dx^j}\right)$$

che corrispondono ai tempi di propagazione del segnale nelle due direzioni.
Se t^* è l'istante di arrivo in *A*, gli istanti di partenza da *B* e di ritorno in *B* saranno rispettivamente $t^* + dt_1$ e $t^* + dt_2$. È quindi ovvio che l'intervallo di tempo coordinato tra l'emissione ed il ritorno del segnale è dato da

$$dt_2 - dt_1 = \frac{2}{g_{00}}\sqrt{(g_{0i}g_{0j} - g_{ij}g_{00})dx^i dx^j}$$

e l'intervallo di tempo proprio lo si ottiene moltiplicando questa espressione per

$$\frac{\sqrt{g_{00}}}{c};$$

la distanza *dl* tra i due punti la si ottiene moltiplicando ancora per *c* e dividendo per 2:

$$dl^2 = \left(-g_{ij} + \frac{g_{0i} g_{0j}}{g_{00}} \right) dx^i dx^j .$$

Questa è l'espressione che determina la distanza in funzione degli elementi di coordinate spaziali dx^i.

Notiamo però che il termine tra parentesi del dl^2 dipende in generale anche da *t*, per cui non ha senso integrare il *dl*, il cui valore dipenderebbe dalla linea di integrazione tra i due punti spaziali dati; l'unico caso in cui la distanza può essere definita in regioni non infinitesime dello spazio-tempo è quello di un sistema di riferimento in cui le g_{ab} non dipendano dal tempo, nel qual caso l'integrale di *dl* su di una curva spaziale acquista un significato determinato. Ciò si verifica, ad esempio, nella soluzione di Schwarzschild, ma non, come vedremo, nelle soluzioni cosmologiche, per le quali il problema sarà più complicato.

Vediamo allora quando è possibile sincronizzare tutti gli orologi in punti diversi di una regione finita dello spazio.

Definiamo come simultaneo all'istante t^* in *A* l'indicazione dell'orologio in *B* nell' istante situato nel punto medio tra la partenza ed il ritorno del segnale in *B* stesso, cioè l'istante

$$t^* + \Delta t = t^* + \frac{1}{2}(dt_1 + dt_2).$$

Sostituendovi le espressioni di dt_1 e dt_2 troviamo la differenza tra i valori della coordinata temporale tra i due eventi:

$$\Delta t = -\frac{g_{0i} dx^i}{g_{00}}.$$

È quindi evidente che, se in un sistema di coordinate si annullano le componenti g_{0i} della metrica, è sempre possibile compiere l'operazione cercata, cioè sincronizzare gli orologi in tutti i punti dello spazio.
Se si riescono a realizzare queste condizioni, l'elemento di linea assume la forma

$$ds^2 = -dt^2 + dl^2(x^i, t) = -dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j$$

con dl^2 elemento di linea del tri-spazio spaziale.